

С. Кублановский

**О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ ЗАДАНИЙ С ПАРАМЕТРАМИ И МОДУЛЯМИ
В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ.**

В этой статье рассматриваются задачи, входившие в варианты заданий ЕГЭ группы С в последние годы. Мы предлагаем здесь единый метод для решения подобного круга задач.

З а д а н и е 1 (С6, ЕГЭ 2009)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

З а д а н и е 2 (С5, ЕГЭ 2010)

При каком значении a наименьшее значение функции

$$f(x) = 2ax + |x^2 - 6x + 8| \text{ меньше } 1.$$

З а д а н и е 3 (С5, ЕГЭ 2011)

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - ax| = ax - 2a$$

имеет единственное решение.

Несмотря на кажущиеся различия все эти задания можно решить одним методом.

З а д а н и е 1

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$$

имеет хотя бы один корень.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = 9|x - 1| - 4x + |3x - |x + a||$

Заметим, что при любом значении a функция $f(x)$ - непрерывная и $f(x) \rightarrow +\infty$

при $x \rightarrow \pm\infty$. Данная функция должна принимать наименьшее значение в некоторой

критической точке. Это может происходить в точках, в которых $3x - |x + a| = 0$, или

$|x - 1| = 0$, или $|x + a| = 0$. Решая эту совокупность уравнений, получим список

возможных критических точек: $x_1 = -\frac{a}{2}$, $x_2 = \frac{a}{4}$, $x_3 = 1$, $x_4 = -a$.

Выполнение условия задачи эквивалентно выполнению совокупности неравенств

$$\left[\begin{array}{l} f(x_1) \leq 0 \\ f(x_2) \leq 0 \\ f(x_3) \leq 0 \\ f(x_4) \leq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f\left(-\frac{a}{2}\right) \leq 0 \\ f\left(\frac{a}{4}\right) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \\ f(-a) \leq 0 \end{array} \right] \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 9\left|-\frac{a}{2}-1\right|-4\left(-\frac{a}{2}\right) \leq 0 \\ 9\left|\frac{a}{4}-1\right|-4\left(\frac{a}{4}\right) \leq 0 \\ -4 \cdot 1 + |3 \cdot 1 - |1+a|| \leq 0 \\ 9|-a-1|-4(-a) + |3(-a)| \leq 0 \end{array} \right]$$

Решая эту совокупность неравенств стандартным методом (каждое неравенство решается по отдельности и находится объединение полученных решений), получим ответ: $-8 \leq a \leq 7,2$.

Совокупность неравенств можно решить с помощью программы УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РЕШАТЕЛЬ - UMS (см. www.umsolver.com).

Зада н и е 2

При каком значении a наименьшее значение функции

$$f(x) = 2ax + |x^2 - 6x + 8| \text{ меньше } 1.$$

Решение. Заметим, что при любом значении a функция $f(x)$ - непрерывная и

$$f(x) \rightarrow +\infty \text{ при } x \rightarrow \pm\infty.$$

Данная функция должна принимать наименьшее значение в некоторой критической точке, в которой производная равна нулю или не существует. Это происходит в граничных точках, в которых $x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2, x_2 = 4$, или - в вершине параболы (при положительном раскрытии модуля): $x = 3 - a$

Выполнение условия задачи эквивалентно выполнению совокупности неравенств:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{l} f(x_1) < 1 \\ f(x_2) < 1 \\ f(x_3) < 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(2) < 1 \\ f(4) < 1 \\ f(3-a) < 1 \end{array} \right] \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a < 1 \\ 8a < 1 \\ 2a(3-a) + |(3-a)^2 - 6(3-a) + 8| < 1 \end{array} \right] \end{aligned}$$

Решая эту совокупность неравенств стандартным методом (каждое неравенство решается по отдельности и находится объединение полученных решений), получим ответ:

$$a < 0.25 \text{ или } a > 3 + \sqrt{7} .$$

Совокупность неравенств можно решить с помощью программы УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РЕШАТЕЛЬ - UMS (см. www.umsolver.com)

З а д а н и е 3

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$|x^2 - ax| = ax - 2a \text{ имеет единственное решение.}$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = |x^2 - ax| - ax + 2a$

Заметим, что при любом значении a функция $f(x)$ - непрерывная и $f(x) \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow \pm\infty$. Данная функция должна принимать наименьшее значение в некоторой критической точке, в которой производная равна нулю или не существует. Это происходит в граничных точках, в которых $|x^2 - ax| = 0 \Leftrightarrow x_1 = a, x_2 = 0$, или - в вершине параболы (при положительном раскрытии модуля) $x_3 = a = x_1$.

Для выполнения условия задачи необходимо выполнение системы:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} f(x_1) \geq 0 \\ f(x_2) \geq 0 \\ f(x_1)f(x_2) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} f(a) \geq 0 \\ f(0) \geq 0 \\ f(a)f(0) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \\ & \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -a^2 + 2a \geq 0 \\ 2a \geq 0 \\ (-a^2 + 2a)2a = 0 \end{array} \right. \end{aligned}$$

Решая эту систему стандартным методом, получим ответ: $a=2, a=0$. Проверкой убеждаемся, что при $a=2$ и при $a=0$ исходное уравнение имеет единственное

решение.

Приведенную выше систему можно решить с помощью программы УНИВЕРСАЛЬНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ РЕШАТЕЛЬ - UMS (см. www.umsolver.com).

Надеюсь, читатель сам сможет придумать задания, подобные рассмотренным выше, и, используя программу UMS, легко проверить правильность своего решения.

У п р а ж н е н и я .

1. Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение имеет хотя бы один корень.

а) $x - |2 - |x - a|| = 3|x - a|$

Ответ: $a \geq 2$

б) $|x^2 - a^2| = 2x + a - 1$

Ответ: $a \leq -1$, $a \geq 0$

2. При каком значении a наименьшее значение функции $y = f(x)$ меньше c .

а) $f(x) = |x^2 - a^2| - 2x + a$, $c = -2$.

Ответ: $a < \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$; $a > 2$

б) $f(x) = |x - a| + |2 - x| - x + 2a$, $c = 3$

Ответ: $a < 2,5$

3) Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение имеет единственное решение.

а) $|x^2 - a^2| = 2ax + 2a$

Ответ: $a = -1, a = 0$

б) $|2x - a - 1| = 2 - |x + a|$

Ответ: $a = -\frac{5}{3}; a = 1$

Текст данной статьи набран при помощи редактора UMS MATH EDITOR (см. www.umsolver.com)